**§4 MỘT SỐ PHÂN PHỐI XÁC SUẤT THÔNG DỤNG**

* 1. **Phân phối đều**

***1. Phân phối đều rời rạc***

**\* Định nghĩa 1.** Biến ngẫu nhiên được gọi là tuân theo luật PP

đều rời rạc, ký hiệu là , nếu nó có bảng PPXS

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | … |  |
|  |  |  | … |  |

Như vậy hàm xác suất của có dạng = 1/, . Ta

có thể mở rộng tập giá trị = 1/, = ;

trong trường hợp này ta ký hiệu .

Dễ dàng, nếu

= ; = .

***2. Phân phối đều liên tục***

**\* Định nghĩa 2.** Biến ngẫu nhiên được gọi là tuân theo luật PP

đều liên tục trên , ký hiệu là , nếu nó có hàm mật

độ

Bằng tính toán đơn giản ta tính được

= ; = .

Phân phối đều có vai trò quan trọng trong tính toán mô

phỏng và nếu thì:

* 1. **Phân phối nhị thức**

***1. Phân phối Bernoulli***

**\* Định nghĩa 1.** Biến ngẫu nhiên được gọi là tuân theo luật PP

Bernoulli, ký hiệu X, nếu hàm xác suất của nó có dạng

() = , = 0 hoặc 1.

Bảng PPXS của biến X là

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 |
|  |  |  |

Để ý mọi phép thử chỉ có 2 kết cục đều có thể mô hình hoá bằng

phân phối này. Dễ dàng có được nếu X

= ; = .

***2. Phân phối nhị thức***

**\* Định nghĩa 2.** Biến ngẫu nhiên được gọi là tuân theo luật PP

nhị thức, ký hiệu là X, nếu hàm xác suất của nó có dạng

() = , .

Biến ngẫu nhiên này liên quan chặt chẽ đến khái niệm lược đồ và

công thức Bernoulli đã nói đến ở chương I. Cần nhắc lại các điều

kiện của lược đồ Bernoulli:

* dãy phép thử giống nhau và độc lập;
* trong mỗi phép thử, sự kiện quan tâm xuất hiện với XS .

Dễ thấy PP Bernoulli là một trường hợp riêng của PP nhị thức.

**\* Thí dụ 1**. Cho biến ngẫu nhiên X ~ . Lập bảng PP của ,

tính EX, sau đó tìm: a) P(X > 3); b) P(X 4).

Giải. Sử dụng công thức Bernoulli trong định nghĩa, ta có

EX = = = = 1,25,

còn cho trong bảng PPXS của X

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|  | 0,2373 | 0,3955 | 0,2637 | 0,0879 | 0,0146 | 0,0010 |

Đồ thị của hàm XS



Bây giờ ta có ngay: a) *P*(*X* > 3) = *p*(4) + *p*(5) = 0,0156 và

b) *P*(*X* 4) = 1 *P*(*X* 4) = 1 = 0,999.

Mặt khác ở §2 chương II ta đã biết , độc lập cùng

PP , :

= *;* = *.*

Chú ý rằng khi khá lớn mức độ đối xứng (đối với kỳ vọng) của

hàm XS càng rõ rệt. Ngoài ra có thể chứng minh hai kết quả sau:

1. Nếu *X* thì *Y* = *X* ;
2. Nếu , , thì +.
   1. **Phân phối Poisson**

***\* Định nghĩa.***Biến ngẫu nhiên được gọi là tuân theo *luật PP*

*Poisson*, ký hiệu là *X* , nếu hàm xác suất của nó có dạng

) = , = 0, 1, 2, …

Phân phối Poisson có nhiều ứng dụng thực tế trong lý thuyết phục

vụ công cộng, kiểm tra chất lượng sản phẩm…

Có thể chứng minh rằng , khi →, → 0 sao cho

→ có giới hạn . Trong thực hành, khi khá lớn

và đủ bé (trong thực tế ), thì ()

.

**\* Thí dụ 2**. Người ta vận chuyển 5000 chai rượu vào kho với XS

mỗi chai bị vỡ là 0,0004. Tính XS để khi vận chuyển có không quá

1 chai bị vỡ.

*Giải.* Có thể dùng công thức Bernoulli để tính, nhưng ở đây =

5000 khá lớn trong khi = 0,0004 quá bé. Nếu gọi là số chai bị

vỡ khi vận chuyển, dễ thấy có phân phối xấp xỉ Poisson với

=2, từ đó

*P*() = + = 0,406.

Các đặc trưng của *X*: =;=.

Để ý giá trị = 1 chính là mod*X.* Người ta đã chứng minh

: nếu không nguyên thì mod*X* là số nguyên nằm giữa

; còn nếu nguyên thì ta có hai mốt là và

thí dụ 2, mốt của là các giá trị 1 và 2 (xác suất = 0,2707 cho cả

hai trường hợp).

* 1. **Các phân phối rời rạc khác**

***1. Phân phối siêu bội***

Một trong giả thiết của PP nhị thức là sự độc lập của các phép

thử thành viên. Một trường hợp cổ điển là giả sử ta có *N* sản

phẩm, trong đó có một tỷ lệ phế phẩm, nếu ta chọn không hoàn

lại ra sản phẩm và gọi là số phế phẩm được rút ra thì

sẽ không thể tính theo công thức Bernoulli.

***\* Định nghĩa 1.***Biến ngẫu nhiên được gọi là tuân theo *luật PP*

*siêu bội*, ký hiệu là *X* ,, (với là tỷ lệ phế phẩm lúc ban

đầu ⇒ số phế phẩm ban đầu), nếu hàm XS của nó có dạng

) = , = .

Để ý nếu đặt = 1 , thì công thức trên có thể viết lại

) = , = .

Khi rất lớn, sẽ ít thay đổi (coi là hằng số xác định) và phân

phối siêu bội có thể xấp xỉ bằng phân phối nhị thức.

**\* Thí dụ 3**. Trong một hộp đèn 15 bóng có 5 bóng kém chất lượng.

Chọn ngẫu nhiên ra 10 bóng (không hoàn lại), hãy lập bảng PPXS

của số bóng kém chất lượng trong mẫu chọn ra.

*Giải.* Gọi là số bóng kém chất lượng trong mẫu, rõ ràng

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|  | 0,00033 | 0,01665 | 0,14985 | 0,39960 | 0,34965 | 0,08392 |

Trong thực hành khi mới xấp xỉ bằng PP nhị thức.

Có thể tính được các đặc trưng của *X* ,,

=;= *.*

Ngoài ra khi → sao cho →, ta sẽ có

= .

Trên cơ sở lược đồ Bernoulli ta có thể đưa ra hai PP khác.

***2. Phân phối hình học***

***\* Định nghĩa 2.***Biến ngẫu nhiên được gọi là tuân theo *luật PP*

*học*, ký hiệu là *X* , nếu hàm XS của nó có dạng

, =0, 1, 2, …

Nếu đặt *A* là sự kiện trong dãy phép thử Bernoulli với ,

thì là số lần không xuất hiện trước lần xuất hiện đầu tiên của *A*.

Dễ dàng chứng minh khi *X*

= = ;= *.*

***3. Phân phối nhị thức âm***

***\* Định nghĩa 3.***Biến ngẫu nhiên được gọi là tuân theo *luật PP*

*nhị thức âm*, ký hiệu là *X ,* , nếu hàm XS của nó có dạng

() = ,

Ý nghĩa của *X* chính là số lần không xuất hiện trước lần xuất hiện

thứ *r* (*r* > 0) của một sự kiện *A* trong dãy phép thử Bernoulli. So

sánh với định nghĩa 2 ở trên ta thấy PP hình học là trường hợp

riêng của PP nhị thức âm khi *r* = 1.

Cũng có thể tính được nếu *X ,* với= 1

=;= *.*

* 1. **Phân phối chuẩn**

***\* Định nghĩa.***Biến ngẫu nhiên được gọi là tuân theo *luật PP*

*chuẩn* (hay *luật Gauss*), ký hiệu là *X ,* , nếu hàm mật độ

của nó có dạng

= ,

Đồ thị của



Ta đã biết từ §2 và §3 =; = ( là độ lệch chuẩn).

Đường cong mật độ chuẩn có dạng chuông, nên trong ứng dụng

người ta còn gọi là PP dạng chuông. Trong đồ thị = a, giá trị này

vừa là trị trung bình, vừa là mốt và trung vị của X. Còn

0,6826; 0,9544;

0,9974 (*quy tắc* *3*).

**\* Thí dụ 4**. Độ dài một chi tiết máy giả sử tuân theo luật chuẩn với

trị trung bình 20*cm* và độ lệch chuẩn là 0,5*cm*. Hãy tính XS để với

một chi tiết loại trên được chọn ngẫu nhiên thì độ dài của nó:

a) lớn hơn 20*cm*; b) bé hơn 19,5*cm*; c) lớn hơn 21,5*cm*.

Giải. Gọi là độ dài chi tiết máy ở trên ⇒ X;

1. Do tính đối xứng của PP qua kỳ vọng nên = 0,5.
2. Do = 68,28% ⇒ XS nằm ngoài khoảng

bằng 31,74%. Do tính đối xứng = 15,87% (và

cũng bằng ).

1. Do cùng các lý do như trên và dùng quy tắc 3

= (199,74%)/2 = 0,0013 (XS khá bé).

Trong trường hợp tổng quát ta có, nếu ,

P () = ,

với là hàm Laplace, và > 0

= 2.

Để ý hàm phân phối của sẽ thoả mãn F() = + 0,5. Đồng

thời bằng phép biến đổi Z = ta có thể đưa về

Z với hàm mật độ (hàm Gauss)

=,

Tổng của n biến ngẫu nhiên độc lập cùng phân phối chuẩn là

một biến ngẫu nhiên chuẩn (ta sẽ thấy chặt chẽ hơn ở chương III).

Từ đó nếu = và độc lập thì

= =.

và Z = (PP chuẩn chuẩn tắc).

Cuối cùng PP chuẩn có thể được dùng để xấp xỉ khá tốt cho một

số PP rời rạc. Về mặt lý thuyết có thể chứng minh nếu X

(hội tụ theo luật PP).

Chính sự kiện này cho phép ta xấp xỉ phân phối nhị thức với khá

lớn và (khi

bằng phân phối chuẩn: Nếu X , thì

= ;

= .

**\* Thí dụ 5**. Cho X ~ , tính .

Giải. Theo công thức ở trên

=

= 0,4884 + 0,4664 = 0,9548.

Nhưng do =20 chưa thật lớn, trong thực hành người ta hiệu

chỉnh công thức xấp xỉ trên như sau

= .

Từ đó = = 0,9743.

Để ý kết quả đúng của XS này là 0,978.

Người ta cũng chứng minh được rằng, nếu X thì

(hội tụ theo luật PP).

* 1. **Phân phối mũ**

***\* Định nghĩa.***Biến ngẫu nhiên được gọi là tuân theo *luật PP*

*mũ*, ký hiệu là *X* , nếu hàm mật độ của nó có dạng

=

Dễ dàng tính được:

= ;=;

và hàm PPXS = 1 , > 0.

**\* Thí dụ 6**.Thời gian hoạt động của một bóng đèn là biến ngẫu

nhiên có PP mũ với kỳ vọng là 500. Tìm XS để thời gian hoạt

động của bóng đèn không bé hơn 1000 giờ.

Giải. Vì = = 500 nên = 0,002. Vậy XS phải tìm là

= 1 = = 0,1353.

* 1. **Các phân phối liên tục khác**

***1. Phân phối***

Nhiều PP liên tục được cảm sinh trực tiếp bởi PP chuẩn. Các PP

này cũng rất quan trọng và hay được dùng trong thống kê.

***\* Định nghĩa 1.***Biến ngẫu nhiên được gọi là tuân theo *luật PP*

*với bậc tự do*, ký hiệu là *X* , nếu hàm mật độ có dạng

) = , > 0, > 0,

trong đó hàm ga-ma đã quen thuộc trong giải tích toán

= , > 0

với các tính chất

1. = ! ( > 0);
2. = …. ( lẻ > 2);
3. = ,

Tuy nhiên cách định nghĩa này khá phức tạp và khó cho phép

nhận biết PP rõ ràng trong thực hành.

**\* Định nghĩa 2.** Cho biến ngẫu nhiên độc lập , =

. Khi đó biến ngẫu nhiên

=

4Đồ thị của hàm mật độ:

Các đặc trưng:

= ; =

Phân phối có một số tính chất quan trọng:

1. Nếu X Y và độc lập ⇒ X +Y
2. (hội tụ theo luật PP).

Trong thống kê ta dùng một hệ quả quan trọng của tính chất (ii):

Nếu ta có biến ngẫu nhiên độc lập , , = , và

= ⇒ .

***2. Phân phối Student* (*phân phối t*())**

***\* Định nghĩa 1.***Biến ngẫu nhiên được gọi là tuân theo *luật PP*

Student với bậc tự do, ký hiệu là X , nếu hàm mật độ có

dạng

) = , > 0.

**\* Định nghĩa 2.** Cho và là hai biến ngẫu nhiên độc lập tuân

theo luật và tương ứng. Khi đó biến ngẫu nhiên

= .

Đồ thị của PP có dạng rất giống với đường cong chuẩn

. Các số đặc trưng của :

= ();=()*.*

PP Student có tính chất

(hội tụ theo luật PP).

Trong thực hành, khi 30, đồ thị của mật độ phân phối đã

rất gần với đồ thị mật độ chuẩn . Chú ý khi = 1, ta có

tuân theo PP Cauchy với hàm mật độ ) = , là PPXS

không có mô men nào.

***3. Phân phối Fisher - Snedecor* (*phân phối* ())**

***\* Định nghĩa 1.***Biến ngẫu nhiên được gọi là tuân theo *luật PP*

Fisher - Snedecorvới và bậc tự do, ký hiệu là X ,

nếu hàm mật độ có dạng

) = ; , > 0.

Ta đưa ra một định nghĩa khác giúp nhận dạng biến có PP

dễ dàng hơn.

**\* Định nghĩa 2.** Cho và là hai biến ngẫu nhiên độc lập tuân

theo luật và tương ứng. Khi đó biến ngẫu nhiên

U = .

Đồ thị của hàm mật độ PP có dạng gần giống với mật độ

của PP . Các số đặc trưng:

= (); = ().

Nếu = 1 ta thấy .

***3. Phân phối gamma***

***\* Định nghĩa 1.***Biến ngẫu nhiên được gọi là tuân theo *luật PP*

gamma, ký hiệu là X , nếu hàm mật độ có dạng

) = ; , > 0.

Các số đặc trưng của X :

= ;=.

Một số tính chất quan trọng của PP gamma:

1. Nếu X Y và độc lập ⇒ X +Y
2. Nếu X thì

(hội tụ theo luật PP).

Để ý nếu = 1 ta có phân phối mũ .

BÀI TẬP

1. Một dây chuyền sản xuất mỗi ngày 2000 chi tiết máy, biết XS để một chi tiết bị lỗi là 5%. Người ta lấy ngẫu nhiên ra một mẫu gồm 1% của số chi tiết được sản xuất trong ngày nào đó. Tính XS để trong mẫu đó số chi tiết bị lỗi không quá 10%.

1. Thống kê liên quan đến xe ô tô tư nhân ở Gotham City cho thấy XS để một xe vượt chuẩn Federal EPA là 0,45. Hỏi một thanh tra viên của thành phố này cần kiểm tra bao nhiêu xe trước khi với XS lớn hơn 0,95 anh ta tìm được 3 xe vượt chuẩn EPA?
2. Giả sử một thiết bị ngừng hoạt động do môi trường nhiệt độ cao và cho biết XS để một công tắc điện tử kích hoạt thiết bị dự phòng là 0,6. Nếu các công tắc hoạt động độc lập và chỉ kích hoạt mỗi lần một thiết bị, thì cần lắp song song bao nhiêu công tắc để XS kích hoạt thành công đạt ít nhất 95%?
3. XS để bán được 1 chiếc máy giặt mới trong vòng 1 ngày là 0,006. Tìm XS để trong ngày tiêu thụ được không quá 9 chiếc từ lô hàng 1000 chiếc.

1. Một quyển sách 500 trang có 500 lỗi. Tính XS để:

a) trong một trang nào đó có không ít hơn 3 lỗi;

b) ít nhất 1 trang chứa nhiều hơn 4 lỗi.

1. Trung bình người bạch tạng chiếm 1% cư dân; đánh giá khả năng trong 200 cư dân được chọn ngẫu nhiên có không ít hơn 4 người bạch tạng.
2. (Bài toán Banach) Một người có trong túi 2 bao diêm, mỗi bao có que. Mỗi khi cần diêm anh ta rút hú hoạ ra một bao. Tìm XS sao cho khi người đó lần đầu rút phải bao rỗng thì trong bao kia còn đúng que.
3. Cho biến ngẫu nhiên có kỳ vọng và độ lệch chuẩn . Hãy tính P cho các trường hợp:
4. có PP Poisson với tham số = 0,09;
5. có PP đều trên (0, 1);
6. có PP mũ với tham số .
7. Tìm XS để một biến ngẫu nhiên có PP (14) se nhận giá trị: a) lớn hơn 2,145; b) lớn hơn 2,145.
8. Tìm XS để một biến ngẫu nhiên có PP (12) lấy giá trị lớn hơn 23,337. Biến sẽ nhận các giá trị nào để XS lớn hơn 0,05?
9. Cho 2 biến ngẫu nhiên và . Tính XS ().
10. Sức bền thiết kế của một dây chịu lực cầu dây văng có PP . Sau khi cầu xây xong ứng suất lực dây đó phải chịu có PP. Hỏi dây chịu lực có đủ sức bền cần thiết hay không?